Concursul interjudeţean de matematică Victor Vâlcovici

Brăila, 20 Mai 2017

Clasa a 8-a - BAREM

Problema 1. Demonstraţi că pentru orice $a, b, c > 0$ este adevărată inegalitatea

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} > \frac{2}{3}.$$

Enache Pătraşcu, Focşani

Soluţie:

Observăm că $\sum \frac{a}{b+2c} = \sum \frac{a^2}{ab+2ac}$. **(1p)**

Folosind inegalitatea $\sum \frac{x^2}{k} \geq \frac{(\sum x)^2}{\sum k}$ ne rezultă $\sum \frac{a}{b+2c} = \sum \frac{a^2}{ab+2ac} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}$. **(3p)**

Dar $\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} = \frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}{3(ab+bc+ca)} > \frac{2(ab+bc+ca)}{3(ab+bc+ca)} = \frac{2}{3}$. **(3p)**

Soluţie alternativă:

Notăm $b+2c = x, c+2a = y, a+2b = z$. Atunci $a+b+c = \frac{x+y+z}{3} \Rightarrow (a+b+c) - (b+2c) = \frac{x+y+z}{3} - x \Rightarrow a - c = \frac{y+z-2x}{3}$. Cum $c+2a = y$, avem $3a = \frac{y+z-2x}{3} + y \Rightarrow a = \frac{4y+z-2x}{9}$. Analog $b = \frac{4z+x-2y}{9}, c = \frac{4x+y-2z}{9}$. **(2p)**

Inegalitatea devine $\sum \frac{4y+z-2x}{9x} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow \sum \frac{4y+z-2x}{x} > 6 \Leftrightarrow \sum (\frac{4y}{x} + \frac{x}{y}) > 12$. **(2p)**

Dar $\frac{4y}{x} + \frac{x}{y} \geq 4 \Leftrightarrow 4y^2 + x^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (2y-x)^2 \geq 0$, cu egalitate când $2y = x$. **(2p)**
Atunci $\sum (\frac{4y}{x} + \frac{x}{y}) \geq 12$ cu egalitate când $8x = 4z = 2y = x$, deci $x = 0$, fals. Atunci inegalitatea este strictă. **(1p)**

Problema 2. Fie numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, a_3, ...$ pentru care

$$a_{n+1} = \frac{n}{a_1 + a_2 + ... + a_n},$$

pentru orice $n \geq 1$.

(a) Demonstraţi că $a_3 \leq 1$.
(b) Dacă $a_5 = 1$, determinaţi a_1.

Cristi Săvescu, Bucureşti

Soluţie:

(a) $a_3 = \frac{2}{a_1+a_2} = \frac{2}{a_1+\frac{1}{a_1}} \leq \frac{2}{2} = 1$. Egalitatea implică $a_1 = a_2 = 1$. **(2p)**

(b) Cum $a_1 + a_2 = \frac{2}{a_3}$, atunci

$$a_4 = \frac{3}{a_1 + a_2 + a_3} = \frac{3}{\frac{2}{a_3} + a_3} = \frac{3}{\frac{1}{a_3} + (\frac{1}{a_3} + a_3)} \leq \frac{3}{1+2} = 1.(*)$$

Am folosit că $a_3 \leq 1$ (din (a)) şi $\frac{1}{a_3} + a_3 \geq 2$. Egalitatea este pentru $a_3 = 1$. **(2p)**

Cum $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{3}{a_4}$, atunci

$$a_5 = \frac{4}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} = \frac{4}{\frac{3}{a_4} + a_4} = \frac{4}{\frac{2}{a_4} + (\frac{1}{a_4} + a_4)} \leq \frac{4}{2+2} = 1.$$

Am folosit că $a_4 \leq 1$ (din (*)) şi $\frac{1}{a_4} + a_4 \geq 2$. Egalitatea este pentru $a_4 = 1$. **(2p)**

Cum $a_5 = 1$, atunci $a_4 = 1$, deci $a_3 = 1$. Din (a) rezultă că $a_1 = a_2 = 1$.**(1p)**

Observaţie: Se observă că, în general dacă $a_n \leq 1$, atunci

$$a_1+a_2+...+a_n = (a_1+a_2+...+a_{n-1})+a_n = \frac{n-1}{a_n}+a_n = \frac{n-2}{a_n}+(a_n+\frac{1}{a_n}) \geq n-2+2 = n,$$

deci $a_{n+1} = \frac{n}{a_1+a_2+...+a_n} \leq 1$, deci $a_n \leq 1$ pentru orice $n \geq 3$. Dacă $a_n = 1$, mergând înapoi pe cazurile de egalitate, obţinem $a_1 = 1$.

Problema 3. Fie O un punct interior tetraedrului $ABCD$. Dreptele AO, BO, CO şi DO intersectează planele $(BCD), (ACD), (ABD)$ şi (ABC) în punctele G, M, N respectiv P. Ştiind că

$$\frac{BO}{MO} = \frac{CO}{NO} = \frac{DO}{PO} = 3,$$

demonstraţi că G este centrul de greutate al triunghiului BCD.

Iulian Danielescu, Brăila

Soluţie:

Cum $\frac{BO}{MO} = \frac{CO}{NO} = 3$ atunci $\Delta MON \sim \Delta BOC$, deci $MN||BC$ şi $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{3}$. **(1p)**

Atunci, dreptele BN, CM sunt coplanare şi se intersectează pe dreapta de interseţie a planurilor din care provin $((ABD), (ACD))$, adică AD. Fie deci
$S = BN \cap CM, S \in AD$.**(1p)**

Avem atunci $MN||BC$, deci $\Delta SNM \sim \Delta SBC$, deci $\frac{SN}{SB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{SN}{NB} = \frac{1}{2}$.**(1p)**

$MNBC$ este trapez, deci SO îi injumătăţeşte bazele, deci $T = SO \cap BC$ este mijlocul lui BC.**(1p)**

În triunghiul BST cu transversala $N - O - C$ avem
$\frac{BN}{SN} \cdot \frac{TC}{BC} \cdot \frac{SO}{TO} = 1 \Rightarrow SO = TO$.**(1p)**

În triunghiul POT cu transversala $D - S - A$ avem $\frac{PD}{OD} \cdot \frac{TA}{PA} \cdot \frac{SO}{TS} = 1 \Rightarrow \frac{TA}{PA} = \frac{3}{2}$.**(1p)**

În triunghiul PTD cu transversala $A - O - G$ avem $\frac{PA}{TA} \cdot \frac{DO}{PO} \cdot \frac{TG}{DB} = 1 \Rightarrow \frac{TG}{DG} = \frac{1}{2}$, de unde rezultă concluzia. **(1p)**